Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2017

Abgabe: keine Abgabe
Besprechung: KW 21

Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: (keine Punkte)

(Postsches Korrespondenzproblem (PKP))
Eine Instanz des *PKP* besteht aus einer Menge

$$K = \left\{ \left[\frac{x_1}{y_1}\right], \dots, \left[\frac{x_k}{y_k}\right] \right\},$$

wobei x_i und y_i nichtleere Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind. Es soll entschieden werden, ob es eine Folge von Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ mit $n \geq 1$ gibt, sodass $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$ gilt. Eine Solche Folge nennen wir auch *korrespondierende Folge*. Anschaulich kann man sich ein Element $\left[\frac{x_i}{y_i}\right]$ aus K als Dominostein vorstellen, der in der oberen Hälfte mit x_i und in der unteren Hälfte mit y_i beschriftet ist. Jedes Element aus K repräsentiert eine Klasse von Dominosteinen und wir gehen davon aus, dass von jeder Klasse beliebig viele Steine verfügbar sind. Die Frage lautet nun, ob es möglich ist, Dominosteine so auszuwählen und hintereinander zu legen, dass oben und unten dieselbe Zeichenkette steht.

Zeigen Sie, dass das Postsches Korrespondenzproblem im Allgemeinen nicht entscheidbar ist.

Die Unentscheidbarkeit des PKP kann durch eine kurze Reduktionskette, die einen Umweg über eine modifizierte Variante des PKP nimmt, nachgewiesen werden. Die Modifikation liegt darin, dass wir einen Startdomino bestimmen, mit dem die korrespondierende Folge beginnen muss, nämlich $\left[\frac{x_1}{y_1}\right]$.

(Modifiziertes PKP (MPKP))
Eine Instanz des MPKP besteht aus einer geordneten Menge

$$K = \left(\left[\frac{x_1}{y_1}\right], \dots, \left[\frac{x_k}{y_k}\right] \right),$$

wobei x_i und y_i nichtleere Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind. Es soll entschieden werden, ob es eine Folge von Indizes $i_2, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ mit $n \geq 1$ gibt, sodass $x_1 x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_1 y_{i_2} \dots y_{i_n}$ gilt. Eine Solche Folge nennen wir auch *korrespondierende Folge*.

Um die Unentscheidbarkeit des Postschen Korrespondenzproblems zu zeigen, genügt es, die folgenden beiden Reduktionen zu beweisen.

(a) $MPKP \leq PKP$.

(b) $H \leq MPKP$.

Aus der Transitivität der Reduktion (vgl. Übungsaufgabe 4.2) folgt dann $H \leq PKP$. Somit folgt aus der Nichtentscheidbarkeit des Halteproblems, dass auch das Postsche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist.