

Offline Bewegungsplanung: Reine Translation

Elmar Langetepe
University of Bonn

Lemma 2.6

Lemma 2.6

$$CP_i := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \}$$

Lemma 2.6

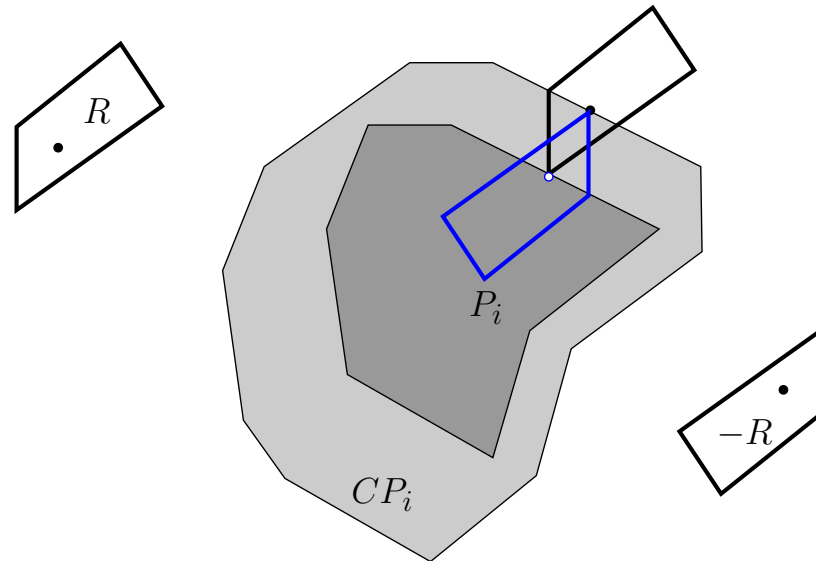
$$CP_i := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \}$$

$$CP_i = P_i \oplus (-R(0, 0))$$

Lemma 2.6

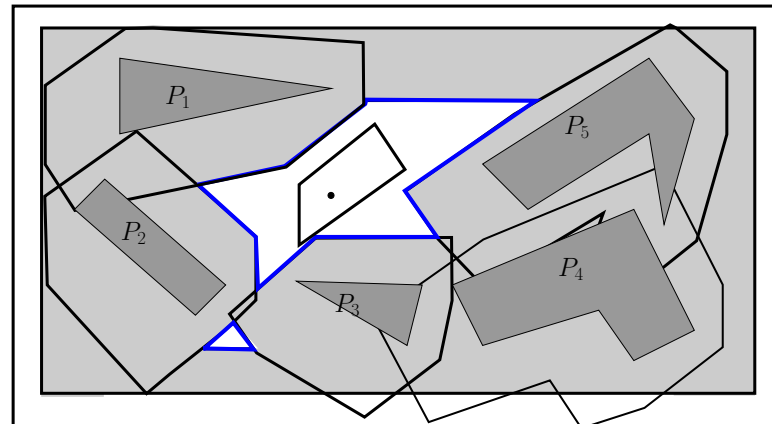
$$CP_i := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \}$$

$$CP_i = P_i \oplus (-R(0, 0))$$



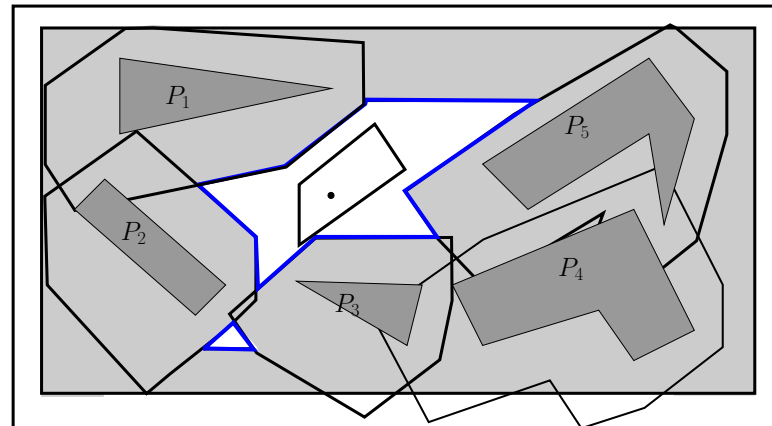
Beweis: Tafel!!!

Folgerung!



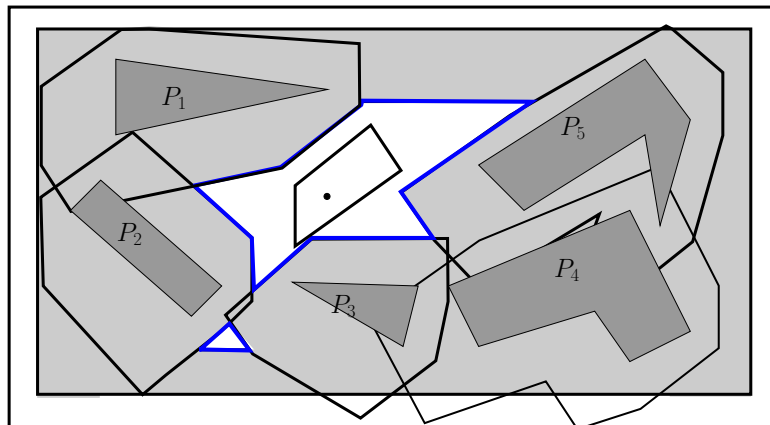
Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$



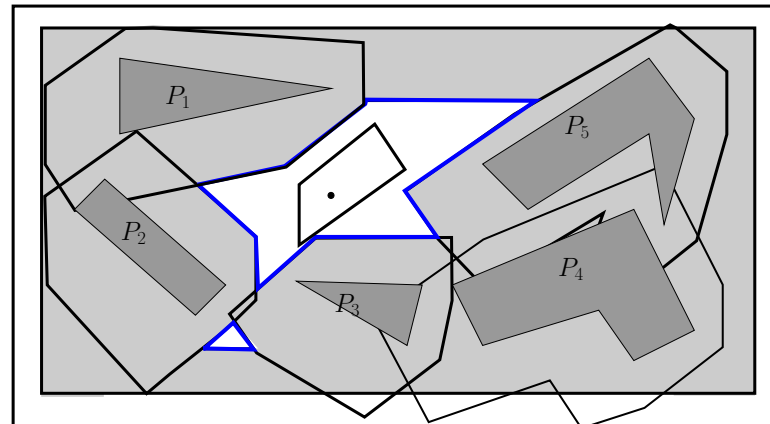
Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \mathring{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$



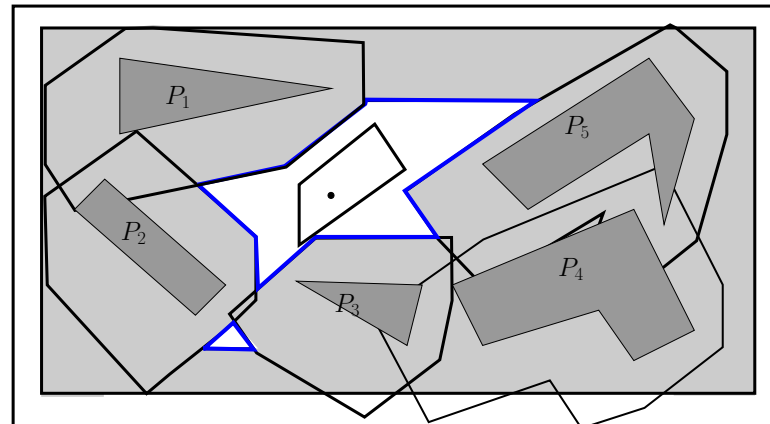
Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k CP_i \right)$



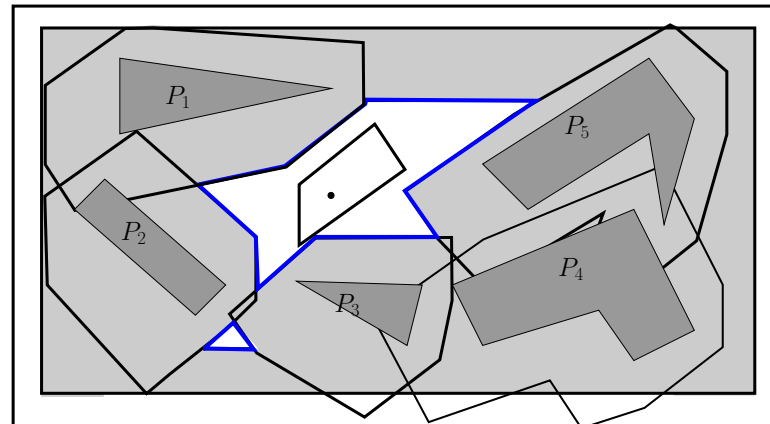
Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k CP_i \right)$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k (P_i \oplus (-R(0, 0))) \right)$



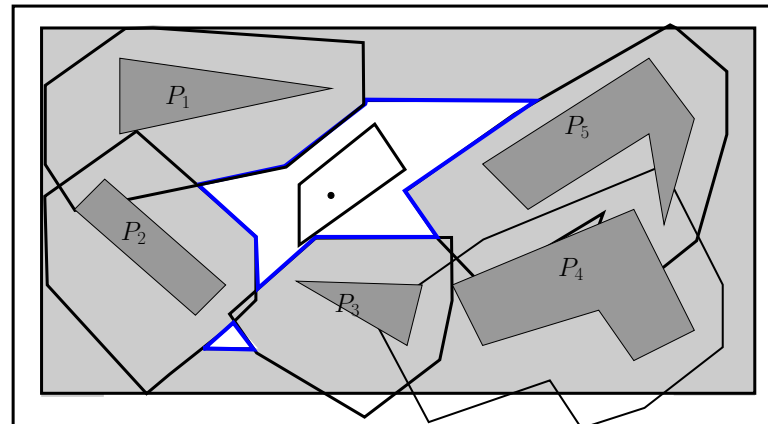
Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k CP_i \right)$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k (P_i \oplus (-R(0, 0))) \right)$
- Alle Summen $P_i \oplus (-R(0, 0))$ bilden



Folgerung!

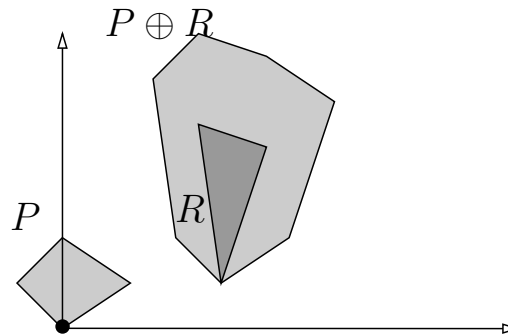
- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x, y) \cap P_i \neq \emptyset \right\}$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k CP_i \right)$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^k (P_i \oplus (-R(0, 0))) \right)$
- Alle Summen $P_i \oplus (-R(0, 0))$ bilden
- Vereinigen!



Eigenschaften von Minkowski-Summen

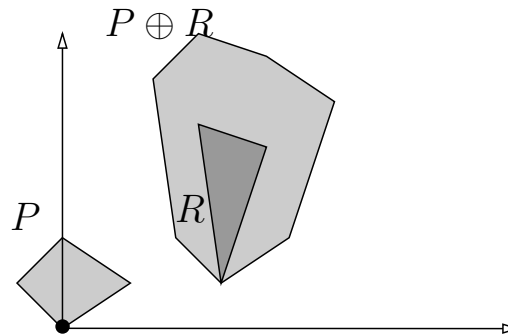
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone



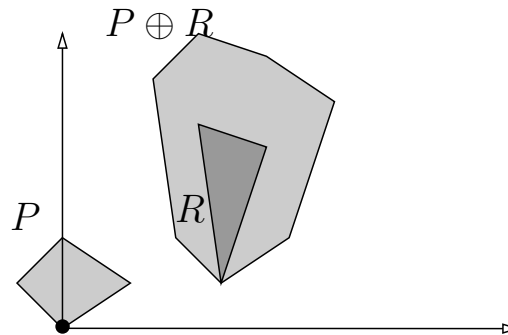
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !



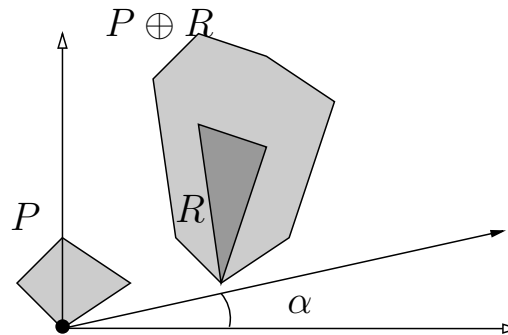
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



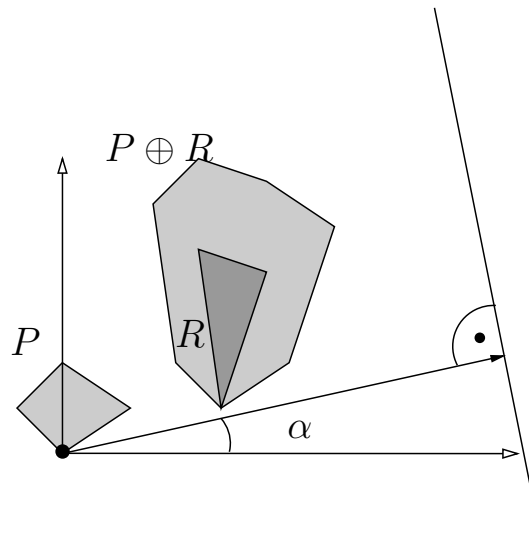
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



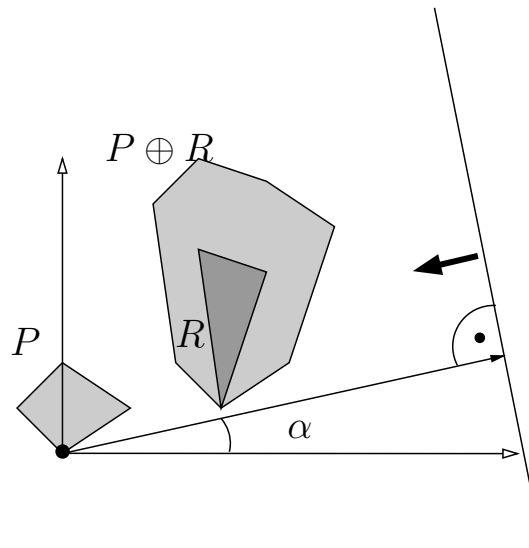
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



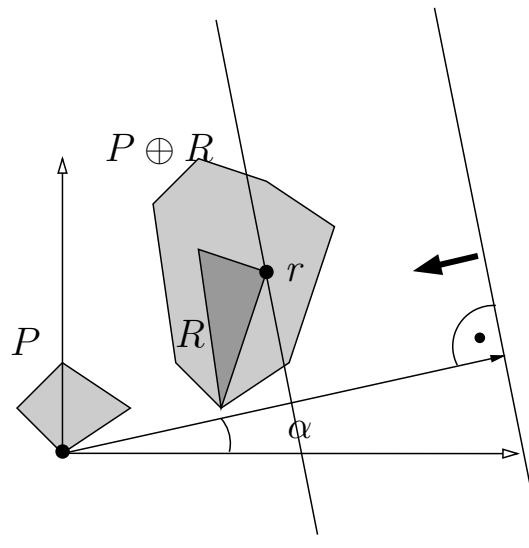
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



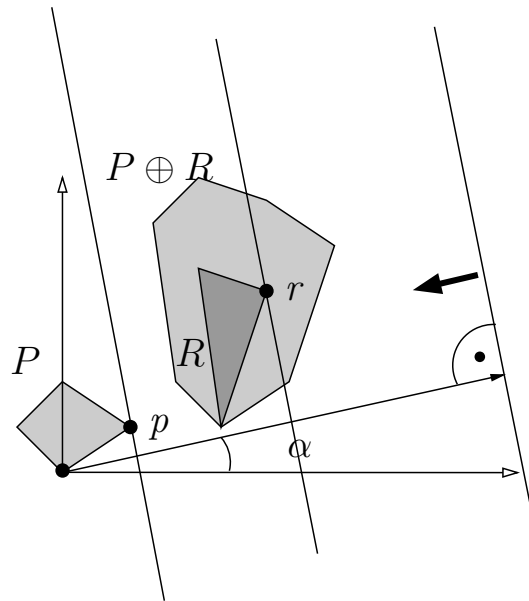
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



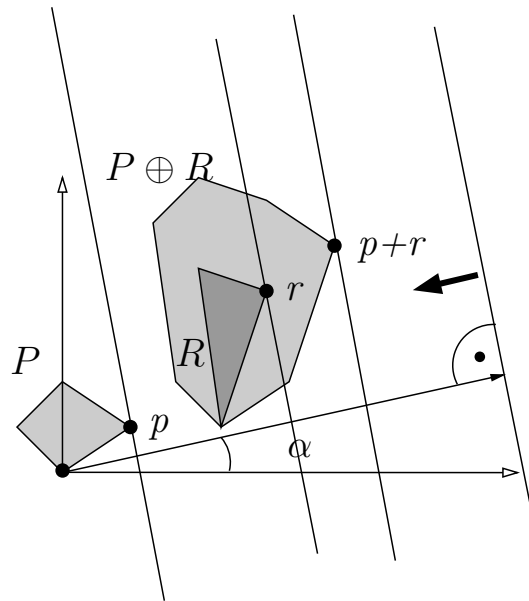
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



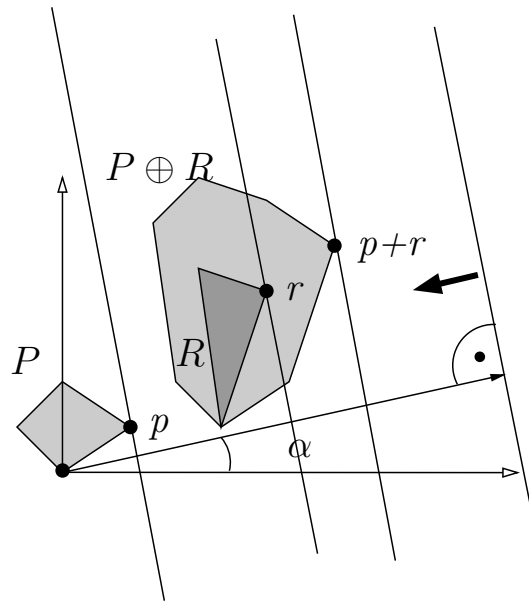
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



Eigenschaften von Minkowski-Summen

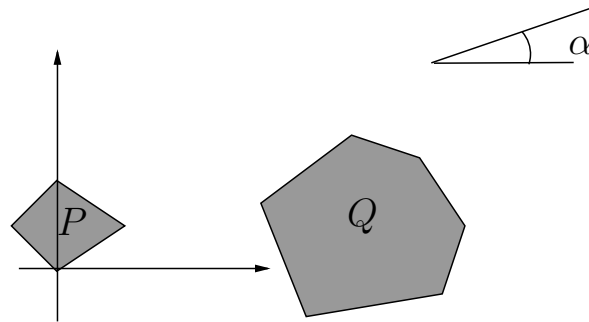
- P, Q konvexe Polygone
- **Bem. 2.8 a)** Extrempunkte bezüglich α !
- Extrempunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extrempunkten



Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

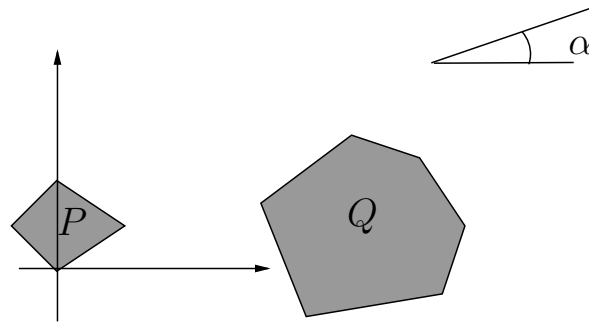
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$



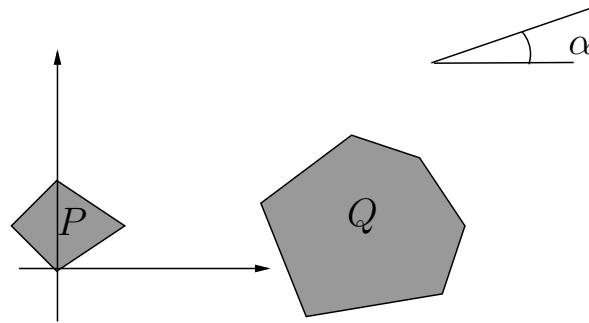
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel)



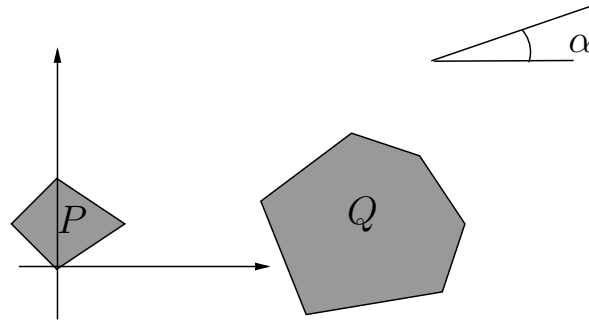
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten



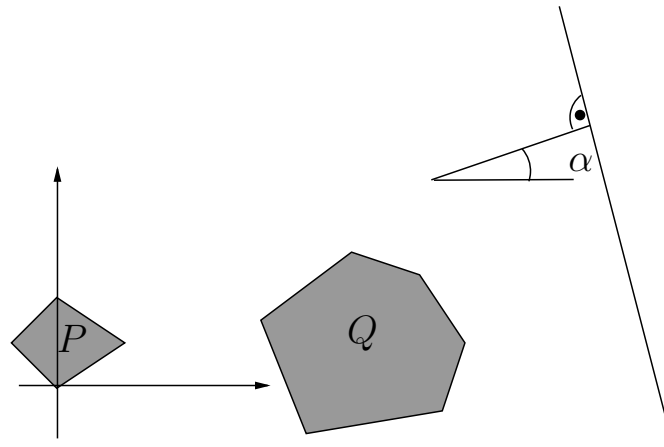
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$:



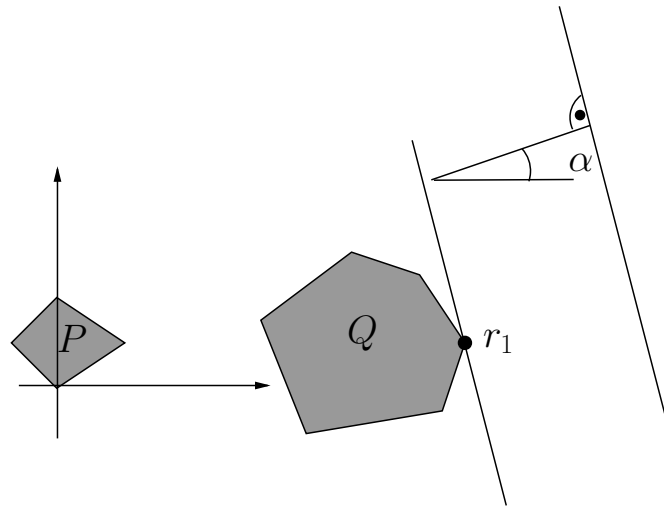
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



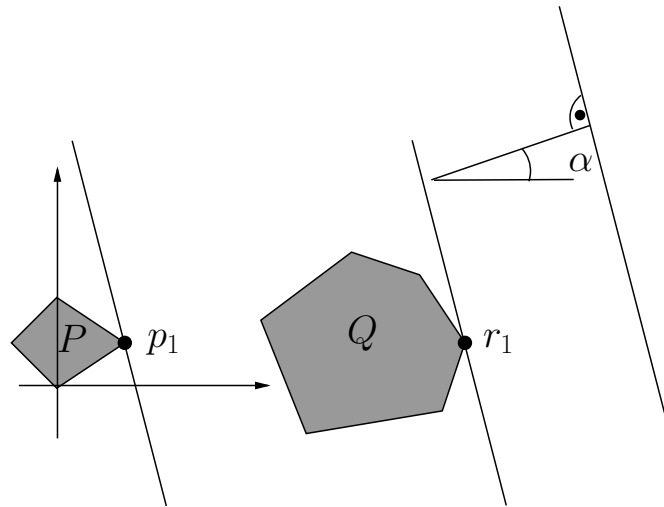
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



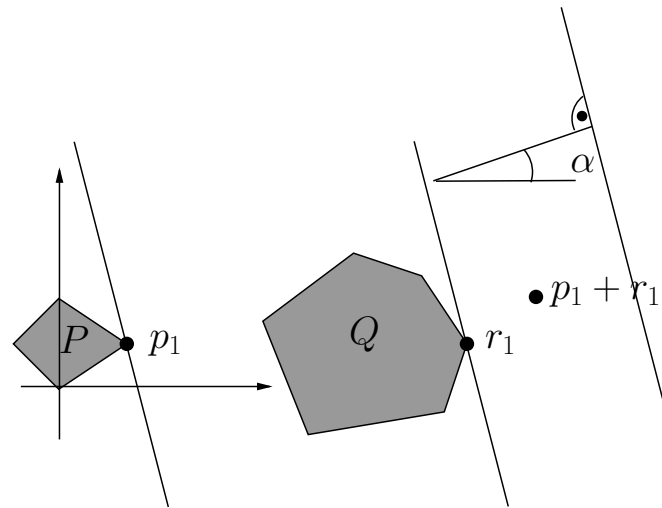
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



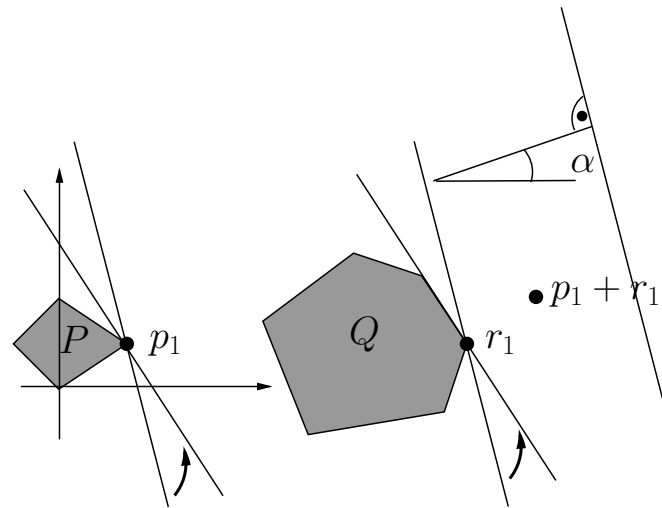
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



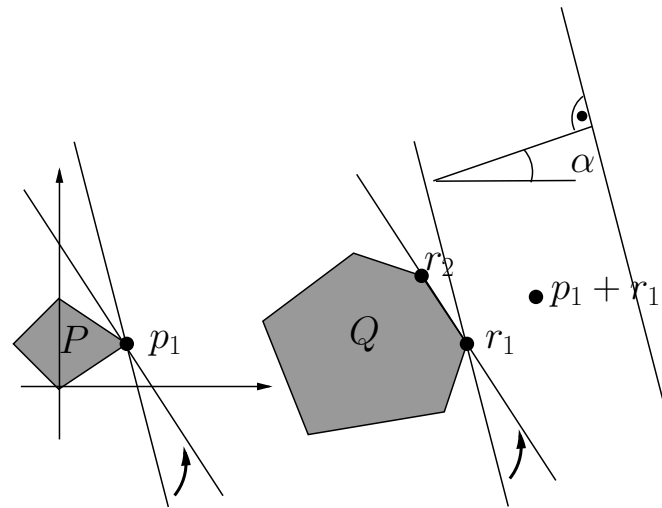
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



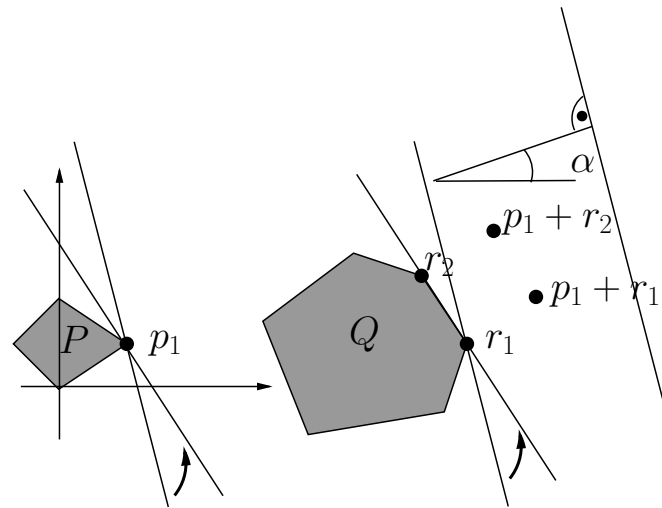
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



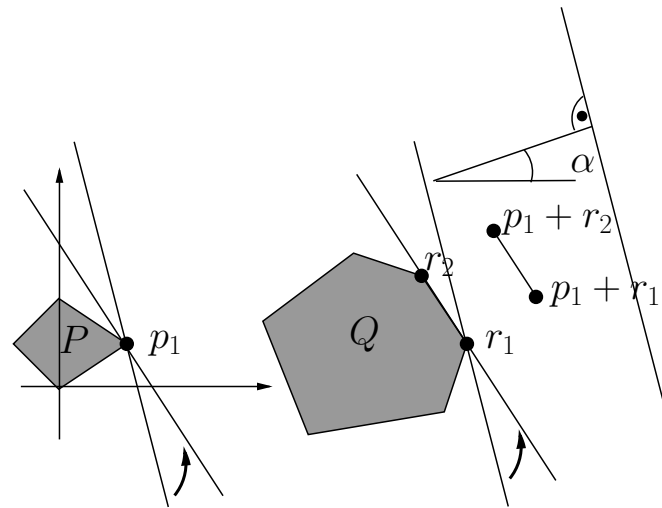
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



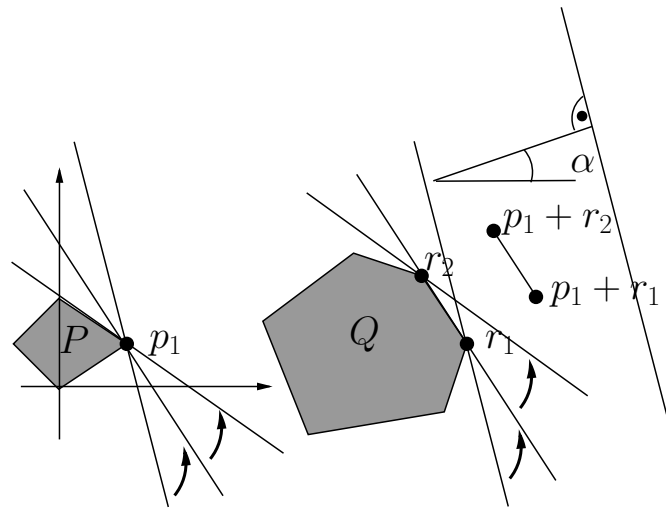
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



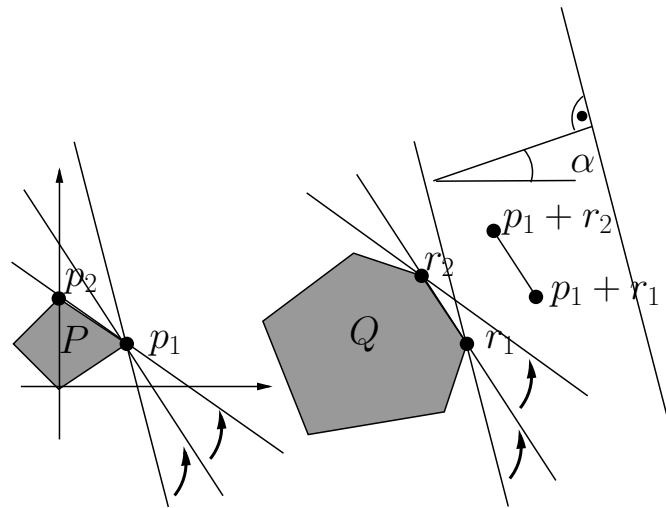
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



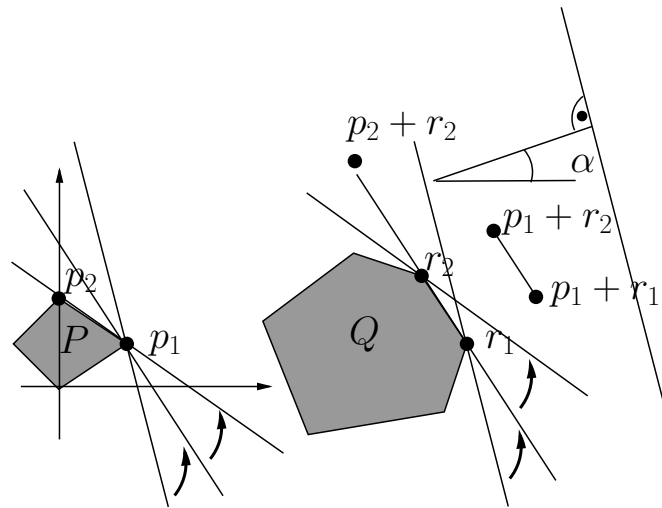
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



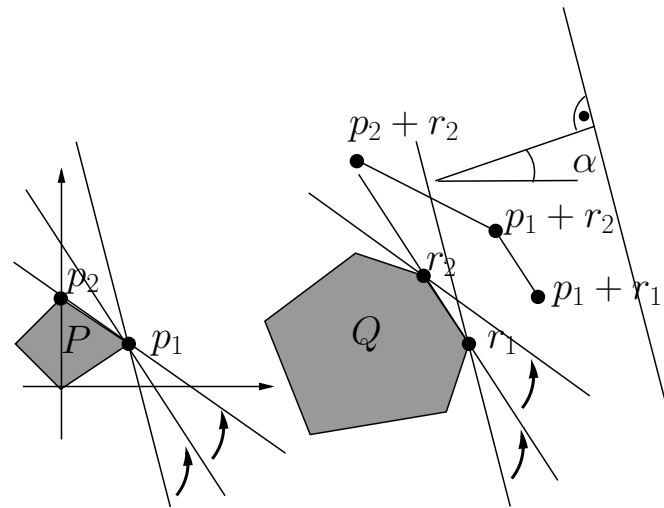
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



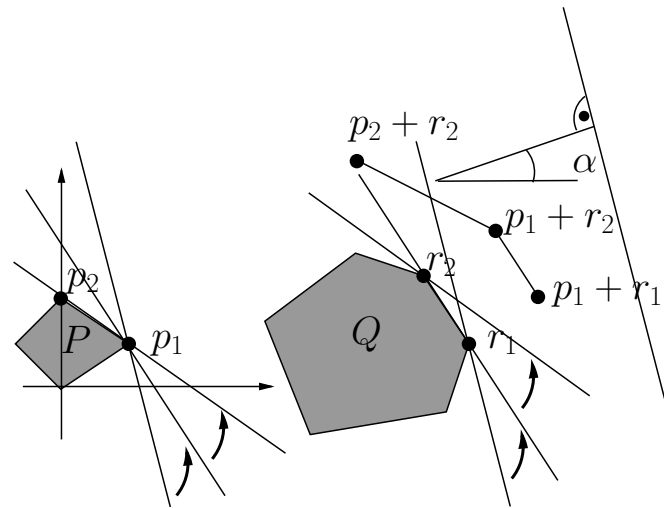
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



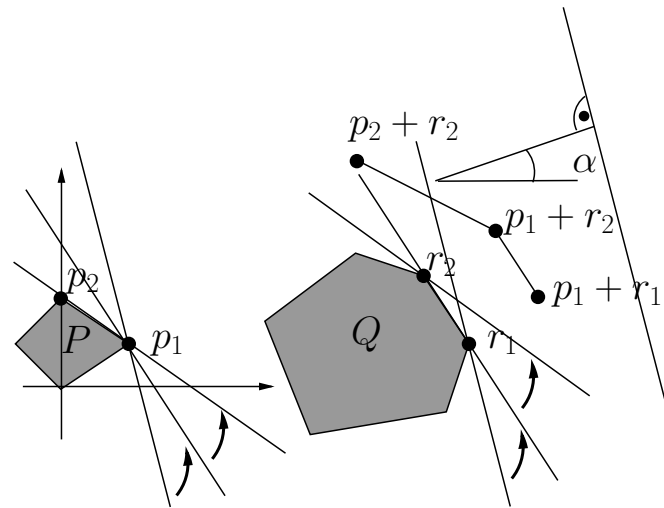
Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



Berechnung und Komplexität **Lem. 2.9**

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n, |Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m + n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m + n)$: Nutze Extrempunkte



Nicht mehr als $O(n + m)$ Kanten entstehen

Idee: Divide and Conquer

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Vereinigung aller CT_i

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Vereinigung aller CT_i
- Divide and Conquer

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Vereinigung aller CT_i
- Divide and Conquer
- Mergen!!!

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Vereinigung aller CT_i
- Divide and Conquer
- Mergen!!!
- Komplexität des Ergebnisses

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve:

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
 - Durch Jordankurven berandete Mengen A , B

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
 - Durch Jordankurven berandete Mengen A , B
 - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

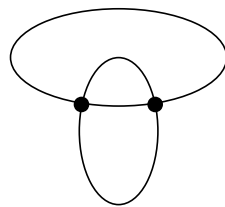
- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
 - Durch Jordankurven berandete Mengen A , B
 - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen
 - Oder Ränder haben höchstens einen Berührungspunkt

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

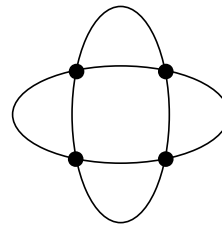
- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
 - Durch Jordankurven berandete Mengen A , B
 - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen
 - Oder Ränder haben höchstens einen Berührungspunkt
- Verhalten sich wie Kreise

Umweg: Pseudokreise **Def. 2.10**

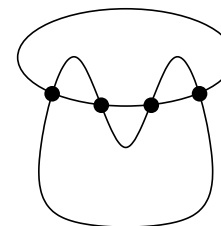
- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
 - Durch Jordankurven berandete Mengen A , B
 - Ränder haben entweder höchstens zwei Kreuzungen
 - Oder Ränder haben höchstens einen Berührungspunkt
- Verhalten sich wie Kreise



(i)



(ii)



(iii)

Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

- Konvexe Mengen A, B

Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

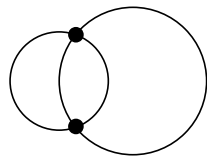
- Konvexe Mengen A, B
- A, B Paar von Pseudokreisen $\Leftrightarrow A \setminus B$ und $B \setminus A$ (weg)-zusammenhängend

Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

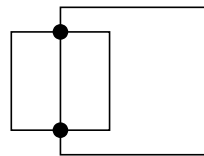
- Konvexe Mengen A, B
- A, B Paar von Pseudokreisen $\Leftrightarrow A \setminus B$ und $B \setminus A$ (weg)-zusammenhängend
- Konvexität ist wichtig (\Leftarrow)

Konvexe Pseudokreise: **Lem. 2.11**

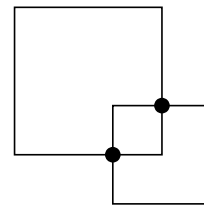
- Konvexe Mengen A, B
- A, B Paar von Pseudokreisen $\Leftrightarrow A \setminus B$ und $B \setminus A$ (weg)-zusammenhängend
- Konvexität ist wichtig (\Leftarrow)



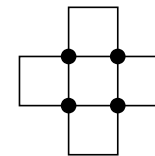
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Fahrplan!

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Konvexer Roboter

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Konvexer Roboter
- CT_i, CT_j sind Pseudokreise

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Konvexer Roboter
- CT_i, CT_j sind Pseudokreise
- Divide and Conquer

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Konvexer Roboter
- CT_i, CT_j sind Pseudokreise
- Divide and Conquer
- Mergen!!!

Fahrplan!

- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: T_1, \dots, T_l
- Konvexer Roboter
- CT_i, CT_j sind Pseudokreise
- Divide and Conquer
- Mergen!!!
- Komplexität der Vereinigung

Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- A_1, A_2, \dots, A_k paarweise Paar v. Pseudokreisen

Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- A_1, A_2, \dots, A_k paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt n Ecken

Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- A_1, A_2, \dots, A_k paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt n Ecken
- $\partial \cup A_i$ hat Komplexität $O(n)$

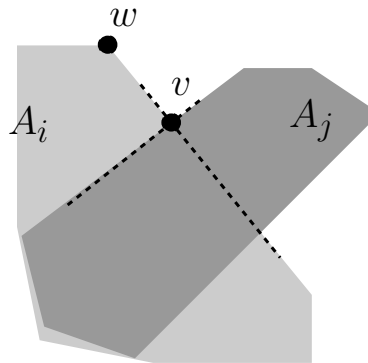
Familie polygonaler Pseudokreise **Th. 2.13**

- A_1, A_2, \dots, A_k paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt n Ecken
- $\partial \cup A_i$ hat Komplexität $O(n)$
- Zählargument, klassisch

Beweis: Th. 2.13

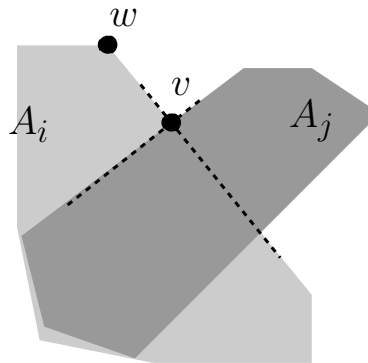
Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele



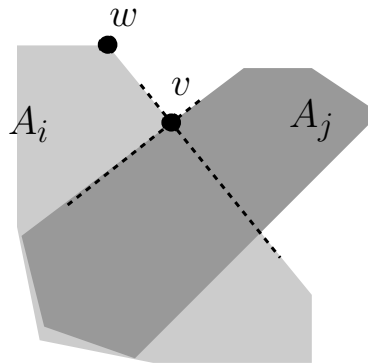
Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \cup A_i$ zuordnen,



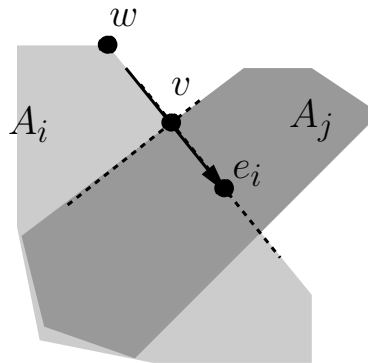
Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \cup A_i$ zuordnen, verfolge Kante e_i :



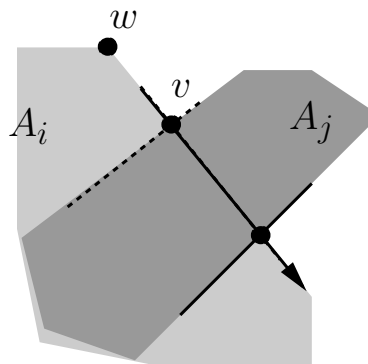
Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \cup A_i$ zuordnen, verfolge Kante e_i :
 - Endet in A_j (innerhalb): Zähle Endpunkt von e_i



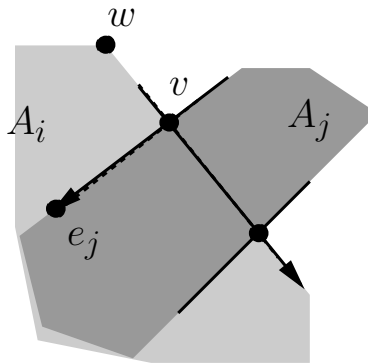
Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \cup A_i$ zuordnen, verfolge Kante e_i :
 - Endet in A_j (innerhalb): Zähle Endpunkt von e_i
 - Geht durch A_j durch: Zähle Endpunkt von e_j (innerhalb)



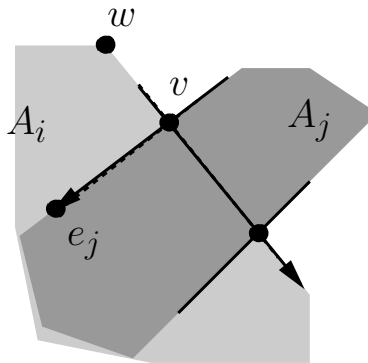
Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \cup A_i$ zuordnen, verfolge Kante e_i :
 - Endet in A_j (innerhalb): Zähle Endpunkt von e_i
 - Geht durch A_j durch: Zähle Endpunkt von e_j (innerhalb)



Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \cup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \cup A_i$ zuordnen, verfolge Kante e_i :
 - Endet in A_j (innerhalb): Zähle Endpunkt von e_i
 - Geht durch A_j durch: Zähle Endpunkt von e_j (innerhalb)
 - Nur zweimal belastbar, nach Aussen verfolgen



Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$,

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke T_1, \dots, T_l

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke T_1, \dots, T_l
- $CT_i = T_i \oplus -R$ Familie von Pseudokreisen

Spezielle Pseudokreise **Lem. 2.12**

- P_1, P_2 konvex, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke T_1, \dots, T_l
- $CT_i = T_i \oplus -R$ Familie von Pseudokreisen
- Komplexität für Divide and Conquer

Komplexität Minkowski-Summe **Lem. 2.15**

- i) P_1, P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ konvex, Komplexität $\Theta(m + n)$.
- ii) Nur P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(mn)$.
- iii) Kein P_i konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(m^2n^2)$.

Müssen nicht disjunkt sein!!!

Komplexität Minkowski-Summe **Lem. 2.15**

- i) P_1, P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ konvex, Komplexität $\Theta(m + n)$.
- ii) Nur P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(mn)$.
- iii) Kein P_i konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(m^2n^2)$.

Müssen nicht disjunkt sein!!!

Beweis!!

Komplexität Minkowski-Summe **Lem. 2.15**

- i) P_1, P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ konvex, Komplexität $\Theta(m + n)$.
- ii) Nur P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(mn)$.
- iii) Kein P_i konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(m^2n^2)$.

Müssen nicht disjunkt sein!!!

Beweis!! i) bereits gezeigt ($\Omega(n + m)$)

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): T_1, \dots, T_{n-2}

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): T_1, \dots, T_{n-2}
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, Inneres disjunkt

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): T_1, \dots, T_{n-2}
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): T_1, \dots, T_{n-2}
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): T_1, \dots, T_{n-2}
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

- Lemma 2.12: Familie v. Pseudokreisen, insg. $O(mn)$ Kanten

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): T_1, \dots, T_{n-2}
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

- Lemma 2.12: Familie v. Pseudokreisen, insg. $O(mn)$ Kanten
- Theorem 2.13: Vereinigung hat Komplexität $O(mn)$

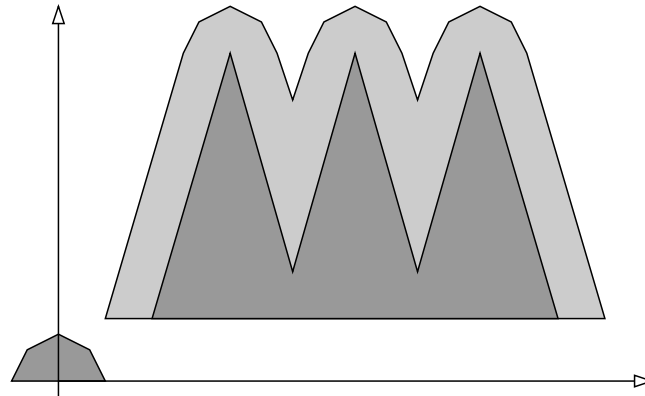
ii) Nur P_2 konvex: $\Omega(mn)$

ii) Nur P_2 konvex: $\Omega(mn)$

Untere Schranken, konstruktiv

ii) Nur P_2 konvex: $\Omega(mn)$

Untere Schranken, konstruktiv



iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$):
 T_1, \dots, T_{n-2} und T'_1, \dots, T'_{m-2}

iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$):

T_1, \dots, T_{n-2} und T'_1, \dots, T'_{m-2}

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, $P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$):

T_1, \dots, T_{n-2} und T'_1, \dots, T'_{m-2}

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$):

T_1, \dots, T_{n-2} und T'_1, \dots, T'_{m-2}

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

- Gesamtzahl der Kanten: $O(nm)$

iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$):

T_1, \dots, T_{n-2} und T'_1, \dots, T'_{m-2}

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

- Gesamtzahl der Kanten: $O(nm)$, jede mit jeder: Paare $O((mn)^2)$

iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$):

T_1, \dots, T_{n-2} und T'_1, \dots, T'_{m-2}

- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i, P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$

- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1) \text{ Kanten}} .$$

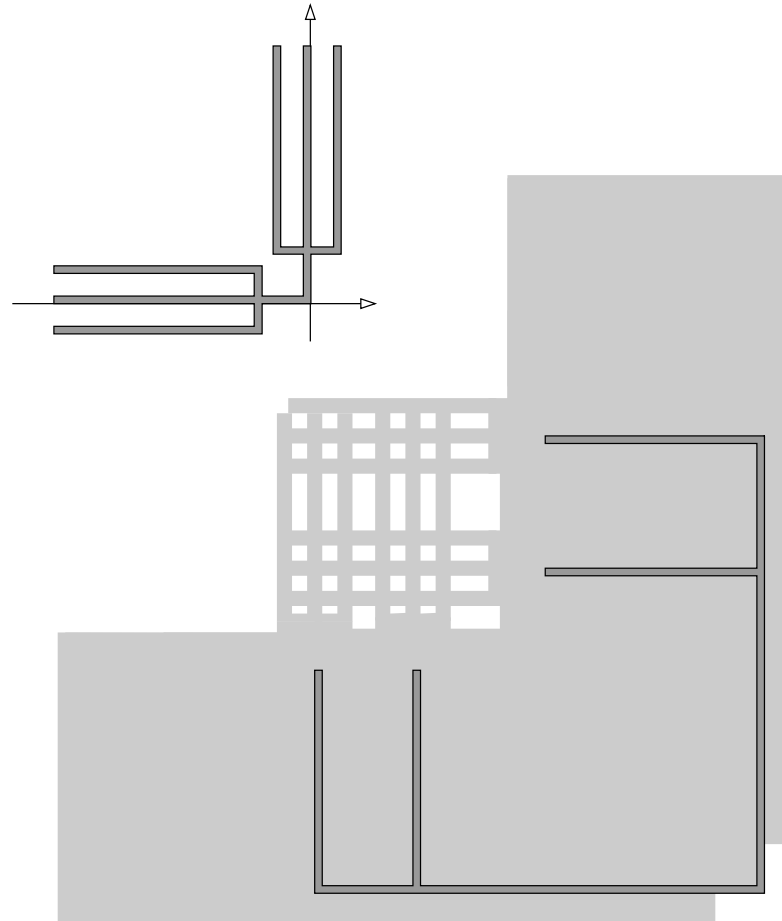
- Gesamtzahl der Kanten: $O(nm)$, jede mit jeder: Paare $O((mn)^2)$

- Pseudokreise?

iii) Kein P_i konvex: $\Omega((mn)^2)$

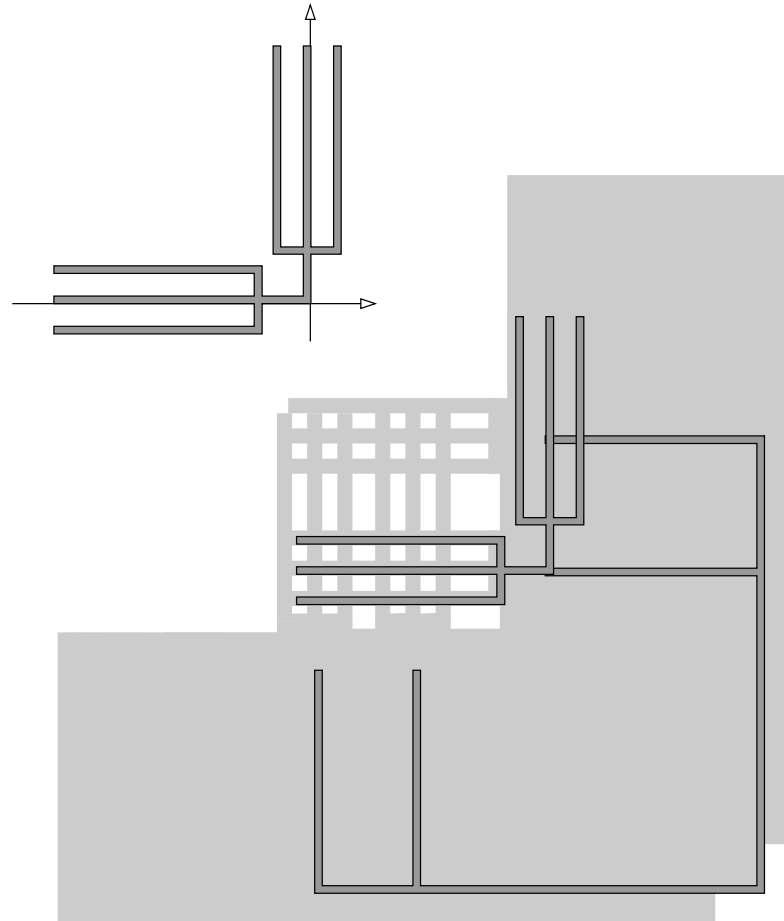
iii) Kein P_i konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv



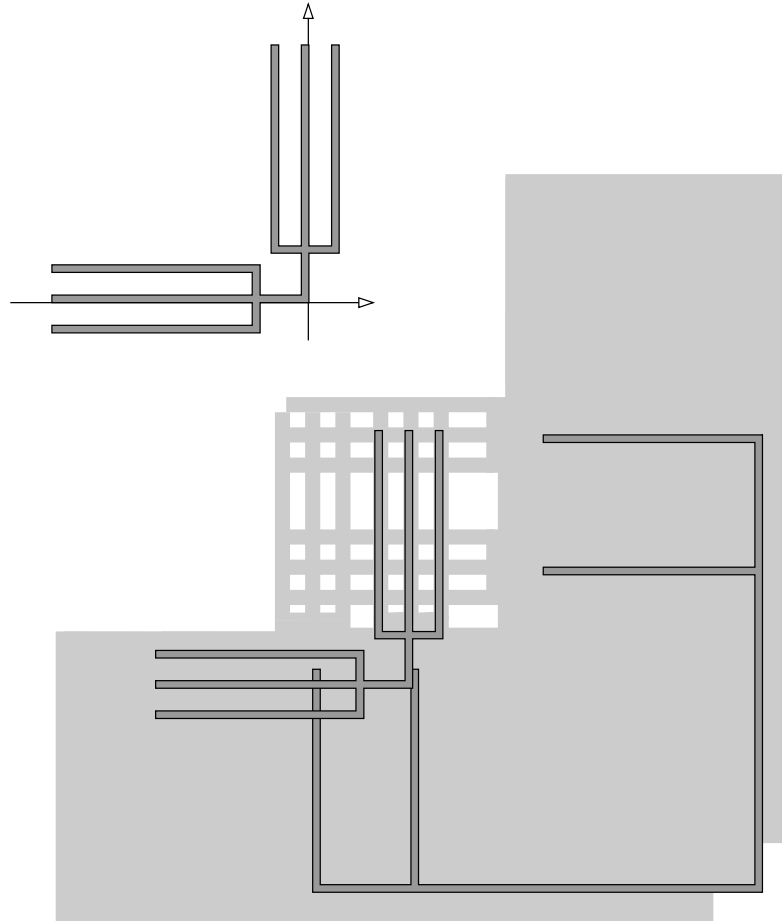
iii) Kein P_i konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv



iii) Kein P_i konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv



iii) Kein P_i konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv

