Anne Driemel
Thomas Kesselheim
Xianghui Zhong

22. Juni 2020
Abgabe bis: 29. Juni 2020, 12 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2020

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Sei $t \in \mathbb{N}$ und sei $d = 2^t$. Zeigen Sie, dass die VC-Dimension der Klasse der Schwellenwertfunktionen in $\mathbb{R}^d$ mindestens $\log_2 d$ ist. Konstruieren Sie dazu eine t-elementige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ die durch die Klasse der Schwellenwertfunktionen aufgespalten wird.
Tipp: Wählen Sie eine Menge $A \subseteq \{+1, -1\}^d$.

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)
Zeigen Sie obere Schranken für die VC-Dimension der Vereinigung von k Intervallen in $\mathbb{R}$, wie in Aufgabe 1 von Übungsblatt 2 definiert. Wenden Sie Satz 15.7 jeweils mit den folgenden Hypothesenklassen an. Geben Sie jeweils explizit die Kompositionsfunktion f an.
(a) Intervalle in $\mathbb{R}$
(b) Schwellenwertfunktionen in $\mathbb{R}$

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei Hypothesenklassen mit Grundmenge X und mit VC-Dimension d_1 und d_2, mit $3 \leq \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 < \infty$. Sei $\mathcal{H}'$ die Hypothesenklasse aller Funktionen der Form $g : X \to \{+1, -1\}$ definiert durch $h_1 \in \mathcal{H}_1, h_2 \in \mathcal{H}_2$ mit

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } h_1(x) = 1 \text{ und } h_2(x) = -1 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie eine obere Schranke für die VC-Dimension von $\mathcal{H}'$ in Abhängigkeit von d_1 und d_2.
Tipp: Modifizieren Sie den Beweis von Satz 15.7.

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Betrachten Sie den Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung, der für eine Trainingsmenge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ und einen Parameter $k \in \mathbb{N}$ einen Entscheidungsbaum mit k inneren Knoten und mit Schwellenwertfunktionen als Basishypothesen berechnet. Konstruieren Sie eine Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ für die die berechnete Lösung nicht optimal ist. Begründen Sie Ihre Antwort.