

Präsenzzettel 1

Aufgabe 1.1

Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem: Die Eingabe ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Mögliche Lösungen sind $S \subseteq E$, sodass (V, S) keine Kreise enthält. Das Ziel ist es, $|S|$ zu maximieren.

Sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Seien $S_1 = \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid i < j, (v_i, v_j) \in E\}$; $S_2 = E \setminus S_1$.

Gib die bessere der beiden Lösungen S_1 und S_2 zurück.

- (a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine korrekte Lösung zurückgibt.
- (b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine $1/2$ -Approximation berechnet.
- (c) Zeigen Sie, dass der Approximationsfaktor nicht besser als $1/2$ ist. (Sie dürfen eine ungeschickte Wahl der Nummerierung der Knoten annehmen.)

Aufgabe 1.2

Beim BIN-PACKING-Problem ist eine Folge $s_1, \dots, s_n \in (0, 1]$ von Objektgrößen gegeben. Gesucht ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die eine Zuordnung $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ existiert, sodass

$$\sum_{f(i)=j} s_i \leq 1$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

Geben Sie einen Greedy-Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ und Approximationsfaktor 2 für das Bin-Packing-Problem an. Geben Sie einen Beweis für den erreichten Approximationsfaktor an.