

Übungszettel 1

Aufgabe 1.1

5 Punkte

Sei $0 < \varepsilon < 0.5$ und $c \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$n^{2-\varepsilon}, \quad n \cdot \log^c n, \quad n, \quad \frac{n^2 \log \log n}{\log n}, \quad n^2, \quad n^{1+\varepsilon}, \quad n^{2-\frac{1}{\log \log n}}.$$

- a) Ordnen Sie diese Funktionen nach ihrer asymptotischen Größe. Begründen Sie Ihre Antworten.
b) Welche von diesen Funktionen sind in $n^{1+o(1)}$ und welche in $n^{2-o(1)}$?

Aufgabe 1.2

5 Punkte

Betrachten Sie die folgende Variante **OVH'** von **OVH**:

OVH': Für eine gegebene Menge $V \subseteq \{0,1\}^d$ mit Kardinalität n gibt es keinen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^{2-\varepsilon} \cdot \text{poly}(d))$ (für alle $\varepsilon > 0$) der entscheidet ob $v, v' \in V$ existieren sodass v und v' orthogonal sind.

Zeigen Sie, dass die beiden Varianten äquivalent sind.

Aufgabe 1.3

5 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem:

MaxInnerProduct: Berechne für zwei gegebene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ mit Kardinalität n das Maximum

$$\max\{\langle u, v \rangle \mid u \in U, v \in V\},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt für $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ bezeichnet.

Beweisen Sie, dass es keinen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^{2-\varepsilon} \cdot \text{poly}(d))$ (für alle $\varepsilon > 0$) für dieses Problem gibt, wenn die OV-Hypothese wahr ist.

Aufgabe 1.4

5 Punkte

Betrachten Sie folgendes Problem:

Gegeben sind zwei Punktmengen $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ mit jeweils n Punkten, existieren zwei Punkte $p \in P$ und $q \in Q$, sodass $\|p - q\|_\infty \leq 1$. (Für $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$ ist $\|p\|_\infty = \max\{|p_i| \mid i = 1, \dots, d\}$.)

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ dieses Problem nicht in $\mathcal{O}(n^{2-\varepsilon} \cdot \text{poly}(d))$ Zeit berechnet werden kann, wenn die OV-Hypothese wahr ist.