

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

1+1+1+1+1+1 Punkte

Analog zum in der Vorlesung eingeführten Reduktionskonzept betrachten wir nun das Konzept der polynomiellen Reduktion: Eine Sprache L_1 heißt *polynomiell reduzierbar auf* eine Sprache L_2 , kurz $L_1 \leq_p L_2$, wenn eine in **Polynomialzeit** berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ existiert, sodass für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2.$$

Wir betrachten zwei Sprachen L_1 und L_2 . Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort. Beachten Sie, dass „ja“, „nein“ und „keine Aussage möglich“ als Antworten in Frage kommen.

Für (a) bis (c) nehmen wir an, dass $L_1 \leq L_2$ gilt.

- (a) Wenn L_2 in \mathcal{P} liegt, liegt dann L_1 in \mathcal{P} ?
- (b) Wenn L_1 nicht entscheidbar ist, liegt dann L_2 in \mathcal{P} ?
- (c) Wenn L_1 in \mathcal{P} liegt, ist dann L_2 entscheidbar?

Für (d) bis (f) nehmen wir an, dass $L_1 \leq_p L_2$ gilt.

- (d) Wenn L_2 in \mathcal{P} liegt, liegt dann L_1 in \mathcal{P} ?
- (e) Wenn L_1 nicht in \mathcal{P} liegt, ist dann L_2 entscheidbar?
- (f) Wenn L_1 nicht entscheidbar ist, ist dann L_2 entscheidbar?

Aufgabe 8.2

6 Punkte

Wir betrachten das Problem PARTITION. Eingabe hierfür sind natürliche Zahlen b_1, \dots, b_n .

- Bei der *Entscheidungsvariante* von PARTITION soll entschieden werden, ob es eine Teilmenge I_1 der Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass gilt: $\sum_{i \in I_1} b_i = \sum_{i \in I_2} b_i$, wobei $I_2 = I \setminus I_1$.
- Bei der *Optimierungsvariante* von PARTITION soll eine solche Partition (I_1, I_2) von I ausgegeben werden, falls sie existiert. Ansonsten soll „Nein“ ausgegeben werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von PARTITION in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von PARTITION in \mathcal{P} liegt.

Aufgabe 8.3

6 Punkte

Wir betrachten das Problem VERTEX COVER. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von VERTEX COVER soll für eine zusätzlich gegebene Zahl $k \leq |V|$ entschieden werden, ob es eine höchstens k -elementige Teilmenge X der Knotenmenge V gibt, sodass jede Kante von G mit mindestens einem Knoten aus X inzident ist. Eine solche Menge heißt *Vertex Cover* von G .
- Bei der *Optimierungsvariante* von VERTEX COVER soll ein minimales Vertex Cover von G bestimmt werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von VERTEX COVER in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von VERTEX COVER in \mathcal{P} liegt.

Präsenzaufgabe

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvarianten von VERTEX COVER und von CLIQUE jeweils polynomiell aufeinander reduzieren lassen.