

Abgabe: 24.05.2017, 12:30 Uhr  
Besprechung: KW 22

## Übungsblatt 5

### Aufgabe 5.1:

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind:

- (a)  $A_{\text{all}} = \{\langle M \rangle : M \text{ akzeptiert alle Eingaben}\}$
- (b)  $A = \{\langle M \rangle w : M \text{ akzeptiert } w\}$
- (c)  $H_{\leq |Q|} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf jeder Eingabe nach höchstens } |Q| \text{ Schritten}\}$   
Hierbei ist  $|Q|$  die Anzahl an Zuständen von  $M$ .
- (d)  $\text{TAPE}_{\text{positive}} = \{\langle M \rangle w : M \text{ benutzt bei Eingabe } w \text{ nur Bandzellen mit Index } i \in \{1, 2, \dots\}\}$

### Aufgabe 5.2:

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Reduktionskonzept „ $\leq$ “ transitiv ist, das heißt es gilt: Aus  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2 \leq L_3$  folgt  $L_1 \leq L_3$ .

### Aufgabe 5.3:

(3 + 3 Punkte)

- (a) Für welche Sprachen  $L$  über dem Alphabet  $\Sigma$  gilt  $L \leq \emptyset$  bzw.  $L \leq \Sigma^*$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Seien  $L_1, L_2 \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$  rekursive Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma$ . Zeigen Sie, dass  $L_1 \leq L_2$  gilt.

### Aufgabe 5.4:

(6 Punkte)

Ein Aufzähler  $E$  für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^* = \{0, 1\}^*$  ist eine Turingmaschine, die alle Wörter aus  $L$  (aber keine Wörter, die nicht zu  $L$  gehören) durch  $\#$  getrennt auf ein spezielles Ausgabeband schreibt. Im Allgemeinen terminiert ein Aufzähler nicht. Insbesondere, wenn  $L$  unendlich viele Wörter enthält, ist nur garantiert, dass für jedes Wort  $w \in L$  ein Index  $i_w \in \mathbb{N}$  existiert, sodass der Aufzähler das Wort  $w$  nach  $i_w$  Schritten auf das Band geschrieben hat.

Beweisen Sie, dass die Sprache  $L$  genau dann rekursiv ist, wenn ein Aufzähler  $E$  existiert, der alle Wörter von  $L$  in lexikographischer Reihenfolge ausgibt.

*Hinweis:* Sie können annehmen, dass  $L$  unendlich viele Wörter enthält.