

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

4+2 Punkte

- (a) Wir betrachten Mengen M_i , $i = 1, 2, \dots$, sowie die Menge $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Zeigen Sie, dass M **genau dann** abzählbar ist, wenn alle Mengen M_i abzählbar sind.
- (b) Welche Mächtigkeit besitzt die Menge aller nicht entscheidbaren Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$?
Beweisen Sie Ihre Aussage.

Hinweis: Nutzen Sie Wissen aus der Vorlesung und Aufgabenteil (a).

Aufgabe 3.2

3+3 Punkte

Seien L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen über dem Alphabet Σ . Zeigen Sie, dass

- (a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\overline{L_1} := \Sigma^* \setminus L_1$ und
(b) $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 w_2 \in \Sigma^* : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

entscheidbare Sprachen sind.

Aufgabe 3.3

2+2+2 Punkte

Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- (a) $H_{\leq 42} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf jeder Eingabe nach höchstens 42 Schritten}\}$,
(b) $\text{TAPE}_{\text{linear}} = \{\langle M \rangle w : M \text{ benutzt bei Eingabe } w \text{ nur Bandzellen mit Index } i \in \{-|w|, \dots, |w|\}\}$,
(c) $L_{q_0} = \{\langle M \rangle : M \text{ verlässt Zustand } q_0 \text{ bei leerer Eingabe}\}$,

Die Bandzellen seien von links nach rechts aufsteigend durchnummeriert, wobei die Bandzelle, auf der der Lese-Schreib-Kopf zu Beginn steht, die Nummer 1 besitzt.

Präsenzaufgabe

Zeigen oder widerlegen sie, dass die Sprache

$$L_{q_3} = \left\{ \langle M \rangle w : \begin{array}{l} M \text{ ist Turingmaschine mit mindestens drei Zuständen und} \\ \text{erreicht } q_3 \text{ bei Eingabe } w \text{ nach endlich vielen Schritten} \end{array} \right\}$$

entscheidbar ist.